МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ, МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИЙ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

МОО ВО Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина



УТВЕРЖДАЮ

Директор
(должность)
Лоцев Г.В
(ФИО)
3 сентября____2026 г.

Вариационное исчисление

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **Высшая школа Природопользования, мехатроники и транспорта**

Учебный план Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"

Квалификация **бакалавр**
Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **3 ЗЕТ**
Часов по учебному плану 108
в том числе:
аудиторные занятия 54
самостоятельная работа 53,9

Виды контроля в семестрах:
зачет с оценкой 4

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	**4 (2.2)**		Итого	
Недель	18			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП
Лекции	18	18	18	18
Практические	36	36	36	36
Контактная работа в период теоретического обучения	0,1	0,1	0,1	0,1
В том числе инт.	2	2	2	2
Итого ауд.	54	54	54	54
Контактная работа	54,1	54,1	54,1	54,1
Сам. работа	53,9	53,9	53,9	53,9
Итого	108	108	108	108

Программу составил(и):
к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич

к.т.н, Джаманкулов Азамат Кенешбекович

Рецензент(ы):
к.ф.-м.н., Комарцов Никита Михайлович

д.т.н, Муслимов Аннас Поясович

Согласовано РОП:
к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич

Рабочая программа дисциплины
Вариационное исчисление

разработана в соответствии с ФГОС 3++:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная механика (приказ Минобрнауки России от 09.08.2021 г. № 729)

составлена на основании учебного плана:

Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"
утвержденного учёным советом вуза от 26.06.2026 протокол № 11.

Рабочая программа одобрена на заседании **Высшей школы Природопользования, мехатроники и транспорта**

Протокол от 02.09.2026 г. № 1
Срок действия программы: 2026-2032 уч.г.
Руководитель подразделения: Алсеитов Мирлан Тилегенович

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ
к рабочей программе дисциплины (модуля)

Вариационное исчисление

№ п/п	Основание внесения изменения	Раздел/ пункт	Содержание изменения
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	Основные цели курса «Вариационное исчисление» представляются следующими положениями: аналогия между методами решения вариационных задач с методами исследования функций на максимум и минимум; установление необходимых условий экстремума функционала посредством сведения исходной вариационной задачи к дифференциальным уравнениям и решений этих уравнений при надлежащих граничных условиях; установление необходимых и достаточных условий экстремума функционала; приложение вариационного исчисления к задачам механики и физики.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.О.3
2.1	**Требования к предварительной подготовке обучающегося:**
2.1.1	Б1.О.2.01. Введение в высшую математику
2.1.2	Б1.О.2.06. Физика
2.1.3	Б1.О.2.03. Линейная алгебра и аналитическая геометрия
2.1.4	Б1.О.2.04. Дифференциальные уравнения
2.2	**Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**
2.2.1	Б1.О.3.13. Уравнения математической физики
2.2.2	Б3.О.03. Подготовка к процедуре защиты и защита выпускной квалификационной работы
2.2.3	Б1.В.1.01. Теория упругости
2.2.4	Б1.О.3.12. Аналитическая механика
2.2.5	Б2.О.02(Пд). Преддипломная практика
2.2.6	Б1.В.1.02. Основы теории пластичности и ползучести
2.2.7	Б1.О.3.15. Программные системы компьютерной математики
2.2.8	Б3.О.02. Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена
2.2.9	Б1.В.1.ДВ.03.01. Численные методы в прикладной механике
2.2.10	Б1.В.1.ДВ.06.01. Специальные главы высшей математики

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
ОПК-11: Способен выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения физико-математический аппарат и современные компьютерные технологии;	
Знать:	
Уровень 1	Знает критерии оценки, методы и средства анализа, систематизации и прогнозирования естественно-научных проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности.
Уровень 2	
Уровень 3	
Уметь:	
Уровень 1	Умет абстрактно мыслить, анализировать, оценивать, систематизировать и прогнозировать естественно-научные проблемы, возникающие в ходе профессиональной деятельности.
Уровень 2	
Уровень 3	
Владеть:	
Уровень 1	Владеет методами и средствами решения естественно-научных проблем, с помощью привлечения физико-математического аппарата и современных компьютерных технологий, возникающих в ходе профессиональной деятельности
Уровень 2	
Уровень 3	

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**
3.1.1	основные понятия вариационного исчисления, постановки классических задач вариационного исчисления,
3.1.2	методы их решения
3.2	**Уметь:**

3.2.1	решать базовые задачи вариационного исчисления
3.3	**Владеть:**
3.3.1	Владеет методами решений классических задач вариационного
3.3.2	исчисления

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетен-ции	Литература	Инте ракт.	Пр. подг.	Примечание
	Раздел 1. Постановка вариационных задач и необходимые условия экстремума							
1.1	Функционалы, вариации и постановка классической вариационной задачи: Функционал как числовая характеристика функции: длина кривой, энергия деформированного тела, действие механической системы. Допустимые функции и ограничения на их гладкость; закреплённые граничные значения. Вариация функции и семейство возмущённых функций; отличие вариации от дифференциала и производной. Первая вариация функционала и условие его стационарности; различие между стационарной функцией и функцией, обеспечивающей минимум. Слабый и сильный локальные экстремумы: смысл близости функций по значениям и производным. /Лек/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.2	Построение функционалов длины, энергии и действия; определение множества допустимых функций. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.3	Вычисление первой вариации простейших интегральных функционалов. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			

1.4	Уравнение Эйлера — Лагранжа для функционала одной функции: Вычисление первой вариации интегрального функционала, зависящего от функции и её первой производной. Интегрирование по частям и выделение граничного слагаемого. Основная лемма вариационного исчисления и вывод уравнения Эйлера — Лагранжа. Переход от вариационной задачи с закреплёнными концами к краевой задаче для дифференциального уравнения. Определение экстремалей на примерах кратчайшей линии и минимизации квадратичного функционала. /Лек/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.5	Составление уравнений Эйлера — Лагранжа для функционалов с закреплёнными концами. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.6	Решение краевых задач для экстремалей и определение постоянных интегрирования. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.7	Первые интегралы и классические задачи вариационного исчисления: Первый интеграл уравнения Эйлера — Лагранжа при отсутствии явной зависимости подынтегральной функции от искомой функции. Тождество Бельтрами при отсутствии явной зависимости от независимой переменной. Задача о брахистохроне: построение функционала времени движения и получение уравнения экстремали. Задача о поверхности вращения минимальной площади: функционал площади и применение первого интеграла. Определение постоянных интегрирования из граничных условий и проверка допустимости найденной экстремали. /Лек/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.8	Решение вариационных задач с использованием первых интегралов и тождества Бельтрами. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.9	Определение экстремалей в задачах о брахистохроне и поверхности вращения минимальной площади. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			

1.10	Анализ функционалов длины, энергии и действия; подбор допустимых функций и вариаций для заданных граничных условий. Самостоятельный вывод уравнения Эйлера — Лагранжа и решение задач с закреплёнными концами. Решение задач с первыми интегралами; исследование зависимости экстремали от граничных данных. /Ср/	4	18	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 2. Граничные условия, ограничения и исследование экстремума							
2.1	Свободные границы и условия трансверсальности: Вариационные задачи с фиксированными координатами концов и свободными значениями искомой функции. Естественные граничные условия, возникающие из граничного слагаемого первой вариации. Задачи с подвижной конечной точкой и условиями её принадлежности заданной кривой. Условия трансверсальности и их геометрический смысл на примере кратчайшей линии до кривой. Различие заданных и естественных граничных условий в энергетической постановке задачи о растяжении стержня. /Лек/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.2	Решение вариационных задач со свободными значениями функции на концах. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.3	Применение условий трансверсальности в задаче о кратчайшей линии до заданной кривой. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			

2.4	Вариационные задачи с несколькими функциями и ограничениями: Функционалы нескольких искомых функций и система уравнений Эйлера — Лагранжа. Изопериметрические задачи: интегральное ограничение и построение расширенного функционала. Метод множителей Лагранжа; определение множителя совместно с экстремалью. Голономные ограничения между искомыми функциями и зависящие от координаты множители Лагранжа. Постановка задачи о равновесной форме гибкой нити заданной длины в поле тяжести. /Лек/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.5	Составление и решение системы уравнений Эйлера — Лагранжа для двух искомых функций. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.6	Решение изопериметрической задачи методом множителей Лагранжа. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.7	Вторая вариация и условия минимума функционала: Вторая вариация функционала и её представление в виде квадратичной формы по допустимым вариациям. Необходимое условие Лежандра и ограничения его применения. Уравнение Якоби, сопряжённые точки и их значение для исследования слабого минимума. Достаточные условия слабого минимума при усиленных условиях Лежандра и Якоби. Выпуклость подынтегральной функции как способ обоснования минимума; примеры стационарных функций, не обеспечивающих минимум. /Лек/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.8	Вычисление второй вариации и проверка условия Лежандра. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.9	Исследование минимума квадратичных функционалов с применением условия Якоби и свойств выпуклости. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			

2.10	Вывод естественных граничных условий и решение задачи с подвижной конечной точкой. Построение расширенного функционала и решение задачи с интегральным ограничением. Исследование второй вариации; сравнение примеров минимума, максимума и стационарности без экстремума. /Ср/	4	18	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 3. Вариационные постановки задач механики							
3.1	Принцип Гамильтона и уравнения движения механических систем: Обобщённые координаты, кинетическая и потенциальная энергии; построение функции Лагранжа. Функционал действия и принцип его стационарности при закреплённых начальном и конечном положениях. Получение уравнений Лагранжа второго рода из вариационного принципа. Вывод уравнения движения одномассовой системы с упругим элементом. Циклические координаты и первые интегралы; сохранение энергии при отсутствии явной зависимости лагранжиана от времени. /Лек/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.2	Построение функционала действия и вывод уравнения движения одномассовой упругой системы. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1	2		
3.3	Получение уравнений движения плоского маятника и проверка интеграла энергии. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			

3.4	Энергетические функционалы и вариационные уравнения механики сплошных сред: Полная потенциальная энергия линейно упругой системы: энергия деформации и потенциал внешних нагрузок. Вариационная постановка задачи о продольной деформации стержня; получение уравнения равновесия и естественных граничных условий. Функционалы с высшими производными и уравнение Эйлера — Пуассона на примере изгиба балки Эйлера — Бернулли. Граничные слагаемые для балки: связь прогиба и угла поворота с изгибающим моментом и поперечной силой. Функционалы поля нескольких независимых переменных: получение уравнения Пуассона из функционала энергии. Слабая форма краевой задачи, допустимые вариации и различие существенных и естественных граничных условий. /Лек/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.5	Вывод уравнения равновесия и граничных условий растянутого стержня из функционала потенциальной энергии. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.6	Вариационная постановка задачи об изгибе балки и определение естественных граничных условий. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			

3.7	Метод Ритца и связь вариационного исчисления с методом конечных элементов: Замена искомой функции конечным линейным сочетанием базисных функций, удовлетворяющих существенным граничным условиям. Метод Ритца: подстановка приближения в функционал и получение системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов. Приближённый расчёт перемещений упругого стержня; влияние числа и вида базисных функций на результат. Отношение Рэлея и метод Рэлея — Ритца для оценки собственной частоты механической системы. Переход от глобальных базисных функций к локальным функциям конечных элементов; вариационное происхождение матрицы жёсткости. Реализация расчёта в системе компьютерной математики: интегрирование, решение системы, сопоставление с аналитическим результатом и проверка сходимости. /Лек/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.8	Расчёт перемещений упругого стержня методом Ритца с одним и двумя неизвестными коэффициентами. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.9	Компьютерная реализация метода Ритца и сравнение результата с аналитическим решением. /Пр/	4	2	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.10	Вывод уравнений движения механической системы с одной степенью свободы и проверка закона сохранения энергии. Сопоставление дифференциальной и вариационной постановок задач о растяжении стержня и изгибе балки. Разработка вычислительного скрипта метода Ритца; исследование изменения погрешности при увеличении числа базисных функций. /Ср/	4	17,9	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.11	Консультации и подготовка к зачету /КрТО/	4	0,1	ОПК-11	Л1.1Л2.1Л3.1			

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Контрольные вопросы и задания

Контрольные вопросы и задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины «Вариационное исчисление»
Вопросы и задания составлены по девяти темам лекционного курса. Форма промежуточной аттестации определяется

учебным планом; приведённый перечень может использоваться для зачёта или экзамена.

1. Контрольные вопросы для текущего контроля

Тема 1. Функционалы, вариации и постановка вариационной задачи

1. Что называется функционалом? Чем функционал отличается от функции нескольких переменных?
2. Какие функционалы используются для описания длины кривой, энергии деформации и действия механической системы?
3. Что представляет собой множество допустимых функций? Как оно определяется граничными условиями?
4. Что называется вариацией функции? Какие требования предъявляются к допустимым вариациям при закреплённых концах?
5. Как определяется первая вариация функционала?
6. Чем стационарность функционала отличается от наличия его минимума или максимума?
7. В чём различие слабого и сильного локальных экстремумов?

Тема 2. Уравнение Эйлера — Лагранжа

1. Как вычисляется первая вариация функционала\[
J[y]=\int_a^b F(x,y,y')\,dx?
\]
2. Для чего при вычислении первой вариации применяется интегрирование по частям?
3. Как формулируется основная лемма вариационного исчисления?
4. Как выводится уравнение Эйлера — Лагранжа?
5. Почему уравнение Эйлера — Лагранжа является необходимым условием экстремума?
6. Как граничные условия исходной задачи используются при определении экстремали?

Тема 3. Первые интегралы и классические вариационные задачи

1. Как упрощается уравнение Эйлера — Лагранжа, если подынтегральная функция не зависит явно от \(y\)?
2. При каком условии применяется тождество Бельтрами?
3. Как первые интегралы позволяют уменьшить порядок уравнения для экстремали?
4. Как строится функционал времени движения в задаче о брахистохроне?
5. Как записывается функционал площади поверхности вращения?
6. Почему найденное решение необходимо проверять на соответствие области определения и граничным условиям?

Тема 4. Свободные границы и условия трансверсальности

1. Чем задача со свободным значением функции на конце отличается от задачи с закреплёнными концами?
2. Как из первой вариации получаются естественные граничные условия?
3. Почему при свободном значении функции на конце соответствующая вариация может быть ненулевой?
4. Что называется условием трансверсальности?
5. Каков геометрический смысл трансверсальности в задаче о кратчайшей линии до заданной кривой?
6. Чем существенные граничные условия отличаются от естественных на примере упругого стержня?

Тема 5. Несколько искомых функций и ограничения

1. Как записывается система уравнений Эйлера — Лагранжа для функционала нескольких функций?
2. Что называется изопериметрической задачей?
3. Как строится расширенный функционал при интегральном ограничении?
4. Как определяется множитель Лагранжа?
5. Чем интегральное ограничение отличается от ограничения, выполняющегося в каждой точке?
6. Почему множитель Лагранжа при поточечном ограничении может быть функцией независимой переменной?
7. Как формулируется вариационная задача о равновесии тяжёлой гибкой нити заданной длины?

Тема 6. Вторая вариация и условия минимума

1. Как определяется вторая вариация функционала?
2. Как знак второй вариации связан с характером стационарной функции?
3. Как формулируется необходимое условие Лежандра?
4. Почему выполнение условия Лежандра само по себе не гарантирует минимум?
5. Для чего используется уравнение Якоби?
6. Что называется сопряжённой точкой?
7. Как выпуклость подынтегральной функции помогает обосновать минимум функционала?

Тема 7. Принцип Гамильтона и уравнения движения

1. Что называется функционалом действия?
2. Как формулируется принцип Гамильтона?
3. Какие ограничения накладываются на вариации обобщённых координат на концах временного интервала?
4. Как из принципа Гамильтона выводятся уравнения Лагранжа второго рода?
5. Что называется циклической координатой? Какой первый интеграл ей соответствует?
6. При каких условиях сохраняется энергия механической системы?
7. Почему стационарность действия не следует автоматически отождествлять с его минимумом?

Тема 8. Энергетические постановки задач механики

1. Как строится функционал полной потенциальной энергии упругой системы?
2. Как из условия стационарности энергии выводится уравнение равновесия растянутого стержня?
3. Как в вариационной постановке учитываются распределённая и сосредоточенная нагрузки?
4. Почему функционал энергии изгиба балки содержит вторую производную прогиба?
5. Как записывается уравнение Эйлера — Пуассона для функционала, зависящего от \(y''\)?
6. Какие естественные граничные условия возникают в задаче об изгибе балки?
7. Что называется слабой формой краевой задачи?
8. Как из функционала поля получается уравнение Пуассона?

Тема 9. Метод Ритца и компьютерная реализация

1. В чём состоит идея метода Ритца?
2. Каким требованиям должны удовлетворять базисные функции?
3. Как учитываются неоднородные существенные граничные условия?
4. Как из функционала получается система уравнений для неизвестных коэффициентов?
5. Как оценивается качество приближённого решения?
6. Что представляет собой отношение Рэлея в задаче о собственных колебаниях?
7. Как метод Ритца связан с методом конечных элементов?
8. Какие проверки необходимы при компьютерной реализации вариационного расчёта?

2. Задания для текущего контроля

Во всех математических заданиях функции и вариации предполагаются достаточно гладкими, а вариации — согласованными с заданными существенными граничными условиями.

Задание 1. Допустимые функции и вариации

Для задачи с условиями

$$
y(0)=0,\qquad y(1)=1
$$

представить допустимую функцию в виде

$$
y(x)=y_0(x)+\varepsilon\eta(x).
$$

Указать требования к y_0 и η. Привести два примера допустимых вариаций и один пример недопустимой вариации.

Задание 2. Первая вариация

Для функционала

$$
J[y]=\int_0^1\left((y')^2+y^2\right)\,dx,
\qquad y(0)=y(1)=0
$$

вычислить первую вариацию, выделить граничное слагаемое и получить условие стационарности.

Задание 3. Решение уравнения Эйлера — Лагранжа

Найти экстремаль функционала

$$
J[y]=\int_0^1\left((y')^2+2y\right)\,dx,
\qquad y(0)=y(1)=0.
$$

Проверить граничные условия и обосновать, обеспечивает ли найденная функция минимум.

Задание 4. Первый интеграл

Для функционала длины

$$
J[y]=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx,
\qquad y(0)=0,\quad y(1)=1
$$

получить первый интеграл, определить экстремаль и объяснить её геометрический смысл.

Задание 5. Тождество Бельтрами

Для функционала

$$
J[y]=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx,
\qquad y(a)=A,\quad y(b)=B,\quad y>0
$$

применить тождество Бельтрами и получить дифференциальное уравнение первого порядка для экстремали. Указать, как определяются постоянные по граничным данным.

Задание 6. Естественное граничное условие

Найти стационарную функцию для

$$
J[y]=\int_0^1\left(\frac12(y')^2-y\right)\,dx,
\qquad y(0)=0,
$$

если $y(1)$ свободно.

Вывести естественное условие при $x=1$ и решить полученную краевую задачу.

Задание 7. Трансверсальность

Точка $A=(0,0)$ фиксирована, а второй конец кривой может перемещаться по прямой

$$
x+y=2.
$$

Построить функционал длины, сформулировать условие трансверсальности и определить кратчайшую кривую и положение её конечной точки.

Задание 8. Две искомые функции

Найти стационарные функции функционала

$$

$$
J[y,z]=\int_0^1\left((y')^2+(z')^2\right)\,dx
$$

при условиях

$$
y(0)=z(0)=0,\qquad y(1)=1,\quad z(1)=2.
$$

Составить систему уравнений Эйлера — Лагранжа и обосновать характер экстремума.

Задание 9. Изопериметрическая задача

Минимизировать

$$
J[y]=\int_0^1(y')^2\,dx
$$

при условиях

$$
y(0)=y(1)=0,\qquad \int_0^1y\,dx=1.
$$

Построить расширенный функционал, определить экстремаль и множитель Лагранжа. Проверить интегральное ограничение.

Задание 10. Вторая вариация и потеря минимума

Исследовать стационарную функцию $y=0$ для

$$
J[y]=\int_0^L\left((y')^2-\alpha y^2\right)\,dx,
\qquad y(0)=y(L)=0,
$$

где $L>0$, $\alpha\geq0$.

Вычислить вторую вариацию, использовать неравенство Пуанкаре и определить значения α, при которых нулевая функция обеспечивает строгий минимум. Отдельно рассмотреть граничное значение параметра.

Задание 11. Принцип Гамильтона

Для системы с массой m и жёсткостью k

$$
T=\frac12m\dot q^{\,2},\qquad U=\frac12kq^2
$$

построить функционал действия и вывести уравнение движения. Получить выражение полной энергии и проверить её сохранение.

Задание 12. Вариационная постановка задачи о стержне

Для стержня длиной L, постоянной жёсткости $EA>0$, распределённой продольной нагрузки $p(x)$ и концевой силы P задан функционал

$$
\Pi[u]=\frac12\int_0^L EA(u')^2\,dx
-\int_0^L p(x)u\,dx-Pu(L),
\qquad u(0)=0.
$$

Вычислить первую вариацию, получить уравнение равновесия и естественное условие на правом конце. Записать слабую форму задачи.

Задание 13. Вариационная постановка задачи о балке

Для консольной балки с постоянной жёсткостью $EI>0$ задан функционал

$$
\Pi[w]=\frac12\int_0^L EI(w'')^2\,dx
-\int_0^L q(x)w\,dx,
\qquad w(0)=w'(0)=0.
$$

Получить дифференциальное уравнение прогиба и естественные условия на свободном конце при отсутствии концевых силы и момента.

Задание 14. Метод Ритца

Для стержня с постоянными $EA>0$ и распределённой нагрузкой p_0

$$
\Pi[u]=\frac12\int_0^L EA(u')^2\,dx-\int_0^L p_0u\,dx,
\qquad u(0)=0,
$$

свободного от концевой силы, построить приближения

$$
u_1(x)=a_1x,\qquad
u_2(x)=a_1x+a_2x^2.
$$

Определить коэффициенты методом Ритца. Сравнить перемещение правого конца и значение потенциальной энергии с точным решением.

Задание 15. Компьютерный расчёт

Реализовать задание 14 в доступной системе компьютерной математики:

1. Вычислить интегралы и сформировать уравнения для коэффициентов.
2. Построить графики точного и приближённых решений.
3. Определить максимальную абсолютную погрешность перемещений.
4. Проверить выполнение существенного граничного условия.
5. Объяснить влияние выбора базиса на точность результата.

3. Вопросы для промежуточной аттестации

1. Функционал и множество допустимых функций. Постановка классической вариационной задачи.
2. Вариация функции, первая вариация функционала и условие стационарности.
3. Слабый и сильный локальные экстремумы.
4. Основная лемма вариационного исчисления.
5. Вывод уравнения Эйлера — Лагранжа при закреплённых концах.
6. Первые интегралы уравнения Эйлера — Лагранжа.
7. Тождество Бельтрами и примеры его применения.
8. Вариационная постановка задачи о брахистохроне.
9. Вариационная постановка задачи о поверхности вращения минимальной площади.
10. Свободные значения функции на концах и естественные граничные условия.
11. Подвижные концы и условия трансверсальности.
12. Функционалы нескольких искомых функций.
13. Изопериметрические задачи и метод множителей Лагранжа.
14. Поточечные ограничения в вариационных задачах.
15. Вторая вариация функционала.
16. Необходимое условие Лежандра.
17. Уравнение Якоби и сопряжённые точки.
18. Достаточные условия слабого минимума. Обоснование минимума с использованием выпуклости.
19. Принцип Гамильтона и вывод уравнений Лагранжа второго рода.
20. Циклические координаты, первые интегралы и сохранение энергии.
21. Функционал полной потенциальной энергии упругой системы.
22. Вариационная постановка задачи о продольной деформации стержня.
23. Функционалы с высшими производными и уравнение Эйлера — Пуассона.
24. Вариационная постановка задачи об изгибе балки.
25. Функционалы нескольких независимых переменных; получение уравнения Пуассона.
26. Слабая форма краевой задачи. Существенные и естественные граничные условия.
27. Метод Ритца: выбор базиса и определение неизвестных коэффициентов.
28. Отношение Рэлея и приближённая оценка собственных частот.
29. Связь метода Ритца с методом конечных элементов.
30. Проверка точности и сходимости компьютерного решения вариационной задачи.

4. Типовые задания для промежуточной аттестации

Задание 1. Экстремаль и обоснование минимума

Найти экстремаль функционала

$$
J[y]=\int_0^1\left((y')^2+y^2\right)\,dx,
\qquad y(0)=0,\quad y(1)=1.
$$

Вывести уравнение Эйлера — Лагранжа, определить постоянные интегрирования и исследовать вторую вариацию.

Задание 2. Задача со свободным концом

Найти стационарную функцию для

$$
J[y]=\int_0^1\left(\frac12(y')^2-2y\right)\,dx,
\qquad y(0)=0,
$$

при свободном значении $y(1)$.

Обосновать естественное граничное условие и характер экстремума.

Задание 3. Интегральное ограничение

Минимизировать

$$
J[y]=\int_0^1(y')^2\,dx
$$

при условиях

$$
y(0)=y(1)=0,\qquad \int_0^1y\,dx=C,
$$

где $C\neq0$ — заданная постоянная.

Определить экстремаль, множитель Лагранжа и минимальное значение функционала.

Задание 4. Исследование характера стационарной функции

Для функционала

$$
J[y]=\int_0^\pi\left((y')^2-\mu y^2\right)\,dx,
\qquad y(0)=y(\pi)=0
$$

\]
исследовать функцию \(y=0\) при \(\mu=0{,}5;\ 1;\ 2\).
Установить, когда возникает строгий минимум, нестрогий минимум или отсутствие экстремума. Вывод подтвердить анализом допустимых вариаций.
Задание 5. Уравнения движения маятника
Для математического маятника длиной \(l\) и массой \(m\)
\[
T=\frac12ml^2\dot\varphi^{\,2},\qquad
U=mgl(1-\cos\varphi)
\]
построить функционал действия и вывести нелинейное уравнение движения. Получить его приближение для малых углов и выражение сохраняющейся энергии.
Задание 6. Упругий стержень
Для стержня с постоянной жёсткостью \(EA\), равномерной продольной нагрузкой \(p_0\), закреплённого при \(x=0\) и свободного от концевой силы при \(x=L\):
1. Построить функционал потенциальной энергии.
2. Вывести уравнение равновесия и граничные условия.
3. Найти перемещение \(u(x)\).
4. Определить продольную силу \(N(x)=EAu'(x)\).
Задание 7. Изгиб консольной балки
Для балки постоянной жёсткости \(EI\), нагруженной равномерной поперечной нагрузкой \(q_0\), использовать функционал
\[
\Pi[w]=\frac12\int_0^L EI(w'')^2\,dx-\int_0^L q_0w\,dx.
\]
Вывести уравнение и полный комплект граничных условий для консольной балки. Определить прогиб свободного конца.
Задание 8. Приближённый расчёт методом Ритца
Для консольной балки из задания 7 принять
\[
w(x)=ax^2.
\]
Определить коэффициент \(a\), приближённый прогиб свободного конца и его относительную погрешность по сравнению с точным решением. Объяснить, какие граничные условия удовлетворяются выбранным приближением заранее.
Задание 9. Функционал поля и слабая форма
Для области \(\Omega\) рассмотреть функционал
\[
J[u]=\int_\Omega
\left(\frac12|\nabla u|^2-fu\right)\,d\Omega,
\qquad u=0\ \text{на }\partial\Omega.
\]
Вычислить первую вариацию, записать слабую форму и получить соответствующее дифференциальное уравнение.
Задание 10. Оценка собственной частоты
Для однородного стержня, закреплённого при \(x=0\) и свободного при \(x=L\), использовать отношение Рэлея
\[
\omega^2\approx
\frac{\displaystyle\int_0^L EA(\phi')^2\,dx}
{\displaystyle\int_0^L \rho A\phi^2\,dx}.
\]
Принять \(\phi(x)=x\), получить оценку первой собственной частоты и объяснить допустимость выбранной функции.
5. Вопросы для защиты расчётных и компьютерных работ
1. Почему выбранный функционал соответствует рассматриваемой физической задаче?
2. Какие функции и вариации являются допустимыми?
3. Какие граничные условия заданы непосредственно, а какие получены из первой вариации?
4. Найдена стационарная функция или доказан минимум? На чём основан вывод?
5. Почему выбранный базис допустим для метода Ритца?
6. Выполняются ли естественные граничные условия приближённым решением точно?
7. Как проверены размерности, знаки нагрузок и физический смысл результата?
8. С каким решением сравнивался компьютерный результат и как вычислялась погрешность?
9. Как меняется решение при увеличении числа базисных функций?
10. Какие ограничения принятой математической модели влияют на применимость результата?

5.2. Темы курсовых работ (проектов)

Курсовых работ по данному курсу нет

5.3. Фонд оценочных средств

1. Соответствие разделов оценочным средствам
Раздел дисциплины Содержание контроля Оценочные средства
1. Постановка задач и необходимые условия экстремума Функционалы, вариации, уравнение Эйлера — Лагранжа, первые интегралы Опрос, тест, практические задания, контрольная работа № 1
2. Границы, ограничения и исследование экстремума Естественные условия, трансверсальность, множители

Лагранжа, вторая вариация Опрос, практические задания, контрольная работа № 2
3. Вариационные постановки механики Принцип Гамильтона, энергетические функционалы стержня и балки, слабая форма Практические задания, индивидуальное расчётное задание
4. Прямые методы и компьютерная реализация Метод Ритца, отношение Рэлея, проверка точности расчёта Компьютерное задание, защита
Все разделы Комплексное применение теории и методов Промежуточная аттестация

2. Организация текущего контроля
Предлагается проводить:
- устный опрос и проверку практических решений в течение семестра;
- тематический тест после изучения основных понятий и уравнения Эйлера — Лагранжа;
- контрольную работу № 1 после раздела 1;
- контрольную работу № 2 после раздела 2;
- индивидуальное расчётное задание после изучения энергетических постановок;
- компьютерное задание с защитой после изучения метода Ритца.
Предлагаемое распределение баллов:
Оценочное средство Максимум
Устный опрос — два оцениваемых ответа 5
Тематический тест 5
Практические задания — пять оцениваемых решений 10
Контрольная работа № 1 10
Контрольная работа № 2 10
Индивидуальное расчётное задание с защитой 10
Компьютерное задание с защитой 10
Текущий контроль 60
Промежуточная аттестация 40
Всего 100

Остальные практические решения используются для обратной связи и подготовки к контрольным мероприятиям.
3. Оценочные средства текущего контроля
3.1. Устный опрос
Типовые вопросы
1. Что называется функционалом? Приведите пример из механики.
2. Как определяются допустимые функции и вариации?
3. Что выражает равенство нулю первой вариации?
4. Почему стационарная функция не обязательно обеспечивает минимум?
5. Как выводится уравнение Эйлера — Лагранжа?
6. В каких случаях используются первые интегралы?
7. Как возникают естественные граничные условия?
8. Что означает условие трансверсальности?
9. Как учитывается интегральное ограничение?
10. Для чего вычисляется вторая вариация?
11. Как формулируется принцип Гамильтона?
12. В чём состоит метод Ритца?
Оценивание одного ответа — до 2,5 балла:
- правильность основных положений — до 1 балла;
- обоснование и использование терминов — до 1 балла;
- ответ на уточняющий вопрос или корректный пример — до 0,5 балла.
3.2. Тематический тест
В каждом задании выбрать один правильный ответ. За правильный ответ начисляется 0,5 балла, за неправильный — 0 баллов.
1. Функционал ставит в соответствие допустимой функции:
А. Число.
Б. Только её производную.
В. Только другую функцию.
Г. Только множество точек.
2. При условиях \(y(a)=A,\ y(b)=B\) допустимая вариация удовлетворяет:
А. \(\eta(a)=A,\ \eta(b)=B\).
Б. \(\eta(a)=\eta(b)=0\).
В. \(\eta'(a)=\eta'(b)=0\) при любых вариациях.
Г. Никаким граничным ограничениям.
3. Равенство первой вариации нулю для всех допустимых вариаций означает:
А. Обязательно строгий минимум.
Б. Обязательно максимум.
В. Стационарность функционала.
Г. Отсутствие граничных условий.

4. Уравнение Эйлера — Лагранжа для $\int_a^b F(x,y,y')\,dx$:
А. $F_y+\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0$.
Б. $F_{y'}=0$ во всех задачах.
В. $F_y=0$ во всех задачах.
Г. $F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0$.
5. Если F не зависит явно от y, то вдоль экстремали:
А. $F_{y'}=\mathrm{const}$.
Б. $y=0$.
В. $F=0$.
Г. $y'=0$.
6. Если F не зависит явно от x, применимо соотношение:
А. $F_x=1$.
Б. $F-y'F_{y'}=\mathrm{const}$.
В. $F+y=\mathrm{const}$.
Г. $y''=0$ во всех случаях.
7. Если b фиксировано, значение $y(b)$ свободно и концевое слагаемое в функционале отсутствует, естественное условие имеет вид:
А. $y(b)=0$.
Б. $y'(b)=0$ для любого F.
В. $F_{y'}(b)=0$.
Г. $F_y(b)=0$.
8. При интегральном ограничении $\int_a^b G\,dx=C$ расширенная подынтегральная функция записывается как:
А. $F+\lambda G$.
Б. FG.
В. F/G.
Г. $F+G'$.
9. Необходимое условие Лежандра для слабого минимума в классической скалярной задаче:
А. $F_{y'y'}<0$.
Б. $F_{y'}=1$.
В. $F_y>0$.
Г. $F_{y'y'}\geq0$.
10. Пробные функции метода Ритца должны заранее удовлетворять:
А. Всем естественным условиям точно.
Б. Существенным граничным условиям задачи.
В. Только условию положительности.
Г. Только условию постоянной производной.
Ключ: 1 — А; 2 — Б; 3 — В; 4 — Г; 5 — А; 6 — Б; 7 — В; 8 — А; 9 — Г; 10 — Б.
3.3. Практические расчётные задания
Для оценивания выбираются пять решений, охватывающих разные разделы:
1. Вычисление первой вариации и вывод уравнения Эйлера — Лагранжа.
2. Решение задачи с использованием первого интеграла.
3. Получение естественных граничных условий.
4. Решение задачи с интегральным ограничением.
5. Вывод уравнения механической системы из вариационного принципа.
Каждое решение — до 2 баллов:
- правильная постановка и допустимые вариации — 0,5;
- корректный метод и преобразования — 1;
- проверка результата — 0,5.
3.4. Контрольная работа № 1
Тема: первая вариация, уравнение Эйлера — Лагранжа, первые интегралы.
Продолжительность: 60 минут. Максимум — 10 баллов.
Вариант 1
1. Для
$$
J[y]=\int_0^1\bigl((y')^2+2y\bigr)\,dx,\qquad y(0)=y(1)=0
$$
вычислить первую вариацию, найти экстремаль и обосновать минимум.
2. Найти экстремаль функционала длины
$$
J[y]=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\qquad y(0)=0,\quad y(1)=1
$$
с использованием первого интеграла.
Вариант 2
1. Для
$$
J[y]=\int_0^1\bigl((y')^2-2y\bigr)\,dx,\qquad y(0)=y(1)=0
$$
вычислить первую вариацию, найти экстремаль и обосновать минимум.
2. Найти экстремаль функционала длины
$$
J[y]=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx,\qquad y(0)=0,\quad y(1)=2.
$$

Ориентиры для проверки
- Вариант 1: $y=x^2-x$; во второй задаче $y=x$.
- Вариант 2: $y=x-x^2$; во второй задаче $y=2x$.
- В первых задачах положительность$$
\delta^2J=2\int_0^1(\eta')^2\,dx
$$
для ненулевой допустимой вариации позволяет обосновать строгий минимум.
Оценивание: первая задача — 6 баллов, вторая — 4 балла. Баллы распределяются за постановку, вывод уравнения, решение и проверку.
3.5. Контрольная работа № 2
Тема: свободные границы, ограничения, вторая вариация.
Продолжительность: 80 минут. Максимум — 10 баллов.
Вариант 1
1. Найти стационарную функцию:$$
J[y]=\int_0^1\left(\frac12(y')^2-y\right)\,dx,
\qquad y(0)=0,\quad y(1)\text{ свободно}.
$$
2. Минимизировать$$
J[y]=\int_0^1(y')^2\,dx
$$
при $y(0)=y(1)=0$ и $\int_0^1y\,dx=1$.
3. Исследовать $y=0$ для$$
J[y]=\int_0^\pi\bigl((y')^2-\mu y^2\bigr)\,dx,
\qquad y(0)=y(\pi)=0
$$
при $\mu=0{,}5;\ 1;\ 2$.
Вариант 2
1. Решить задачу 1 с подынтегральной функцией $\frac12(y')^2-2y$.
2. Решить задачу 2 при $\int_0^1y\,dx=2$.
3. Решить задачу 3 при $\mu=0;\ 1;\ 3$.
Ориентиры для проверки
- Задача 1: естественное условие $y'(1)=0$; решения соответственно$$
y=x-\frac{x^2}{2},\qquad y=2x-x^2.
$$
- Задача 2: при ограничении $\int_0^1y\,dx=C$)$$
y=6Cx(1-x),\qquad J_{\min}=12C^2.
$$
- Задача 3: при $\mu<1$ — строгий минимум; при $\mu=1$ — нестрогий минимум; для указанных $\mu>1$ — отсутствие экстремума, поскольку квадратичная форма принимает оба знака.
Оценивание: задача 1 — 3 балла; задача 2 — 4 балла; задача 3 — 3 балла.
3.6. Индивидуальное расчётное задание
Тема: вариационная постановка задачи о продольной деформации стержня.
Дан стержень длиной L, постоянной жёсткости $EA>0$, закреплённый при $x=0$. На него действуют равномерная продольная нагрузка p_0 и концевая сила P.
Исходный функционал:
$$
\Pi[u]=\frac12\int_0^L EA(u')^2\,dx
-\int_0^L p_0u\,dx-Pu(L).
$$
Требуется:
1. Определить допустимые перемещения и вариации.
2. Вычислить первую вариацию.
3. Получить уравнение равновесия и естественное граничное условие.
4. Найти $u(x)$ и $N(x)=EAu'(x)$.
5. Записать слабую форму.
6. Обосновать минимум потенциальной энергии.
7. Проверить размерности и объяснить физический смысл результата.
Числовые значения $L,\ E,\ A,\ p_0,\ P$ задаются преподавателем в согласованных единицах. Допускается решение в символическом виде.
Ориентиры для проверки:
$$
EAu''+p_0=0,\qquad u(0)=0,\qquad EAu'(L)=P;
$$
$$
u(x)=\frac{(P+p_0L)x-\frac12p_0x^2}{EA},
\qquad N(x)=P+p_0(L-x).
$$
Оценивание — 10 баллов:

Критерий Баллы
Допустимые функции и вариации 1
Первая вариация, уравнение и граничные условия 3
Аналитическое решение и проверка 2
Слабая форма и обоснование минимума 2
Защита и физическая интерпретация 2

3.7. Компьютерное задание
Тема: реализация метода Ритца для упругого стержня.
Используется задача предыдущего пункта при \(P=0\). Принять:
\[
u_n(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\left(\frac{x}{L}\right)^i,
\qquad n=1,\ 2,\ 3.
\]
Требуется:
1. Сформировать приближённый функционал.
2. Получить и решить систему \(\partial\Pi/\partial a_i=0\).
3. Построить графики приближённых и точного решений.
4. Определить максимальную абсолютную погрешность перемещения.
5. Сопоставить значения потенциальной энергии.
6. Объяснить, при каком \(n\) точное решение принадлежит выбранному пространству.
7. Представить воспроизводимый скрипт и краткий отчёт.
Используется доступная система компьютерной математики. Автоматическое получение ответа без объяснения постановки и проверки не подтверждает освоение метода.
Ориентиры для проверки: точное решение квадратично, поэтому при \(n\geq2\) воспроизводится с точностью вычислений. Для \(n=1\):
\[
u_1(x)=\frac{p_0L}{2EA}x.
\]
Перемещение правого конца в этом примере совпадает с точным, поэтому оценка погрешности только в одной точке недостаточна.
Оценивание — 10 баллов:
Критерий Баллы
Функционал, базис и существенные условия 2
Система уравнений и реализация 3
Сравнение решений и оценка погрешности 2
Анализ результата 1
Самостоятельная защита 2

4. Промежуточная аттестация
4.1. Структура аттестационного задания
Предлагается включать:
- два теоретических вопроса из разных разделов — по 10 баллов;
- одну расчётную задачу — 20 баллов.
Максимум — 40 баллов. Рекомендуемое время подготовки — 60 минут, с последующим объяснением решения и ответами на уточняющие вопросы.
4.2. Перечень теоретических вопросов
1. Функционалы и постановка классической вариационной задачи.
2. Допустимые функции и вариации. Существенные граничные условия.
3. Первая вариация и стационарность функционала.
4. Слабый и сильный локальные экстремумы.
5. Основная лемма вариационного исчисления.
6. Вывод уравнения Эйлера — Лагранжа.
7. Первые интегралы и тождество Бельтрами.
8. Постановка задачи о брахистохроне.
9. Поверхность вращения минимальной площади.
10. Естественные граничные условия.
11. Подвижные концы и трансверсальность.
12. Функционалы нескольких искомых функций.
13. Изопериметрические задачи.
14. Метод множителей Лагранжа при поточечных ограничениях.
15. Вторая вариация и её роль в исследовании экстремума.
16. Условие Лежандра и пределы его применения.
17. Уравнение Якоби и сопряжённые точки.
18. Достаточные условия слабого минимума. Выпуклость функционала.
19. Принцип Гамильтона.

20. Вывод уравнений Лагранжа второго рода.
21. Циклические координаты и сохранение энергии.
22. Полная потенциальная энергия упругой системы.
23. Вариационная постановка задачи о стержне.
24. Уравнение Эйлера — Пуассона.
25. Вариационная постановка задачи об изгибе балки.
26. Функционалы нескольких независимых переменных. Уравнение Пуассона.
27. Слабая форма краевой задачи.
28. Метод Ритца и требования к пробным функциям.
29. Отношение Рэлея и оценка собственных частот.
30. Связь вариационной постановки с методом конечных элементов. Проверка компьютерного решения.

4.3. Банк типовых расчётных задач

Задача 1. Закреплённые концы

Найти экстремаль и обосновать минимум:

$$
J[y]=\int_0^1\bigl((y')^2+y^2\bigr)\,dx,
\qquad y(0)=0,\quad y(1)=1.
$$

Ориентир:

$$
y(x)=\frac{\sinh x}{\sinh1}.
$$

Задача 2. Свободное значение на конце

Найти стационарную функцию:

$$
J[y]=\int_0^1\left(\frac12(y')^2-2y\right)\,dx,
\qquad y(0)=0,\quad y(1)\text{ свободно}.
$$

Ориентир: $y'(1)=0,\ y=2x-x^2$.

Задача 3. Интегральное ограничение

Минимизировать:

$$
J[y]=\int_0^1(y')^2\,dx,\qquad
y(0)=y(1)=0,\quad \int_0^1y\,dx=C.
$$

Ориентир: $y=6Cx(1-x),\ J_{\min}=12C^2$.

Задача 4. Характер стационарной функции

Исследовать $y=0$:

$$
J[y]=\int_0^\pi\bigl((y')^2-\mu y^2\bigr)\,dx,
\qquad y(0)=y(\pi)=0,
$$

при $\mu=0{,}5;\ 1;\ 2$. Вывод подтвердить допустимыми вариациями.

Задача 5. Математический маятник

При

$$
T=\frac12ml^2\dot\varphi^2,\qquad
U=mgl(1-\cos\varphi)
$$

построить действие, вывести уравнение движения, получить линейное приближение для малых углов и интеграл энергии.

Ориентир:

$$
\ddot\varphi+\frac gl\sin\varphi=0.
$$

Задача 6. Продольная деформация стержня

Для стержня постоянной жёсткости EA, закреплённого слева, с нагрузкой p_0 и свободным правым концом построить функционал, получить уравнение и найти перемещение.

Ориентир:

$$
u(x)=\frac{p_0}{EA}\left(Lx-\frac{x^2}{2}\right).
$$

Задача 7. Консольная балка

Из функционала

$$
\Pi[w]=\frac12\int_0^L EI(w'')^2\,dx-\int_0^L q_0w\,dx
$$

получить уравнение и граничные условия консольной балки без концевых силы и момента. Найти прогиб свободного конца.

Ориентиры:
$$
EIw''''=q_0,\quad w(0)=w'(0)=0,\quad w''(L)=w'''(L)=0;
\qquad w(L)=\frac{q_0L^4}{8EI}.
$$
Задача 8. Метод Ритца для балки
Для задачи 7 принять $w=ax^2$. Определить коэффициент и относительную погрешность прогиба свободного конца.
Ориентиры:
$$
a=\frac{q_0L^2}{12EI},\qquad
w_{\mathrm{P}}(L)=\frac{q_0L^4}{12EI},
$$
относительная погрешность — $1/3$, или около $33{,}3\%$.
Задача 9. Функционал поля
Для
$$
J[u]=\int_\Omega\left(\frac12|\nabla u|^2-fu\right)\,d\Omega,
\qquad u|_{\partial\Omega}=0
$$
получить слабую форму и дифференциальное уравнение.
Ориентиры:
$$
\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla\eta\,d\Omega
=\int_\Omega f\eta\,d\Omega,\qquad -\Delta u=f.
$$
Задача 10. Отношение Рэлея
Для однородного стержня с закреплённым левым и свободным правым концом принять $\phi=x$:
$$
\omega^2\approx
\frac{\int_0^L EA(\phi')^2\,dx}
{\int_0^L\rho A\phi^2\,dx}.
$$
Получить оценку частоты и объяснить допустимость пробной функции.
Ориентир:
$$
\omega_{\mathrm{P}}=\frac1L\sqrt{\frac{3E}{\rho}}.
$$
4.4. Примеры аттестационных билетов
Билет Теоретический вопрос 1 Теоретический вопрос 2 Задача
1 Вывод уравнения Эйлера — Лагранжа Метод Ритца и требования к базису Задача 2
2 Изопериметрические задачи Принцип Гамильтона Задача 7
3 Вторая вариация и условия минимума Слабая форма краевой задачи Задача 3
4 Первые интегралы Энергетическая постановка задачи о стержне Задача 8
5 Естественные условия и трансверсальность Отношение Рэлея Задача 1

5. Критерии промежуточной аттестации
Каждый теоретический ответ — до 10 баллов:
Критерий Баллы
Правильность определений и основных положений 4
Обоснование, вывод или объяснение условий применимости 3
Корректный пример или инженерная интерпретация 2
Ответ на уточняющий вопрос 1

Расчётная задача — до 20 баллов:
Критерий Баллы
Постановка, допустимые функции и вариации 3
Выбор и обоснование метода 3
Вывод уравнений и граничных условий 6
Решение и вычисления 5
Проверка и интерпретация результата 3

Правильный результат без объяснения метода оценивается только по подтверждённым элементам решения.
Арифметическая ошибка не обнуляет корректную постановку и вывод.
6. Предлагаемая итоговая шкала
Итоговый результат Оценка Характеристика

85–100 баллов Отлично Самостоятельно формулирует и решает задачи, обосновывает условия экстремума, проверяет аналитические и компьютерные результаты
70–84 балла Хорошо Владеет основными методами; допускает отдельные неточности, не нарушающие логику решения
60–69 баллов Удовлетворительно Решает базовые задачи; испытывает затруднения при обосновании условий и интерпретации
Менее 60 баллов Неудовлетворительно Не подтверждает владение базовыми постановками и методами

Для варианта «зачёт» предлагается результат «зачтено» при сумме не менее 60 баллов и получении не менее 20 из 40 баллов за промежуточную аттестацию. Для экзамена также предлагается минимальный результат промежуточной аттестации 20 баллов. Эти условия применяются после согласования с локальными правилами университета.
7. Порядок применения фонда
1. До контрольного мероприятия обучающимся сообщаются темы, формат, время, разрешённые средства и критерии.
2. Письменные контрольные работы выполняются индивидуально. Использование системы компьютерной математики допускается в специально обозначенном компьютерном задании.
3. При защите преподаватель проверяет понимание постановки, граничных условий, метода и результата.
4. При пересдаче используются равноценные задания с изменёнными исходными данными.
5. Результат фиксируется по отдельным критериям с указанием содержательных ошибок.
6. Перед включением фонда в утверждаемую документацию уточняются форма аттестации, индикаторы ОПК-11 и действующая университетская шкала оценивания.

5.4. Перечень видов оценочных средств

Для текущего контроля целесообразно использовать устный опрос, практические задания, две письменные контрольные работы, индивидуальное расчётное и компьютерное задания с защитой.
Для промежуточной аттестации — комплект теоретических вопросов и расчётных задач. Форма аттестации — зачёт.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Эльсгольц Л.Э.	Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебник для вузов	М.: Наука 1969

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л2.1	Гельфанд И.М., Фомин С.В.	Вариационное исчисление: учебник для ун-тов	М.: Физматгиз 1961

6.1.3. Методические разработки

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л3.1	Лелевкина Л.Г., Рафатов Р.Р.	Вариационное исчисление и основы математической теории управления: учебное пособие	Бишкек: Изд-во КРСУ 1999

6.3. Перечень информационных и образовательных технологий

6.3.1 Компетентностно-ориентированные образовательные технологии

6.3.1.1	MATLAB с пакетами Symbolic Math Toolbox и Optimization Toolbox — символьное дифференцирование и интегрирование, решение уравнений и задач оптимизации, реализация метода Ритца. MATLAB
6.3.1.2	Python с библиотеками SymPy, NumPy, SciPy и Matplotlib — аналитические преобразования, численные расчёты, исследование приближённых решений и построение графиков. docs.sympy.org
6.3.1.3	GNU Octave — выполнение матричных вычислений, решение систем уравнений, программирование приближённых методов и визуализация результатов.

6.3.2 Перечень информационных справочных систем и программного обеспечения

6.3.2.1	Перечень профессиональных баз данных
6.3.2.2	1. Math-Net.Ru — общероссийский математический портал для поиска научных публикаций по математике, механике и смежным направлениям. mathnet.ru
6.3.2.3	2. zbMATH Open — международная база математической литературы, содержащая библиографические сведения, рефераты и рецензии. fiz-karlsruhe.de
6.3.2.4	3. eLIBRARY.RU — научная электронная библиотека для поиска публикаций по вариационному исчислению, вычислительным методам и прикладной механике. elibrary.ru
6.3.2.5	Перечень информационных справочных систем
6.3.2.6	1. Wolfram MathWorld — математический справочный ресурс по понятиям, теоремам и методам математического анализа и прикладной математики. mathworld.wolfram.com

6.3.2.7	2. NIST Digital Library of Mathematical Functions — электронный справочник по специальным функциям, их свойствам и формулам, используемым при решении задач математической физики.

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

Освоение дисциплины предполагает последовательное изучение теоретического материала, решение вариационных задач, выполнение самостоятельных и компьютерных расчётов. Основное внимание следует уделять связи между постановкой задачи, выбором допустимых функций, получением уравнений и граничных условий, а также проверкой найденного решения.

Для успешного изучения курса необходимо использовать знания математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений и физики. Перед началом занятий рекомендуется повторить дифференцирование функций нескольких переменных, интегрирование по частям, решение обыкновенных дифференциальных уравнений и исследование квадратичных форм.

1. Работа на лекционных занятиях

Перед лекцией следует просмотреть конспект предыдущего занятия, восстановить основные определения и формулы, отметить вопросы, вызвавшие затруднения.

В процессе лекции рекомендуется:

- записывать определения функционала, вариации, экстремали и условий экстремума;
- фиксировать не только итоговые формулы, но и последовательность их вывода;
- указывать предположения о гладкости функций и ограничения, при которых применяются рассматриваемые методы;
- отдельно отмечать заданные и получаемые из вариационной постановки граничные условия;
- сопровождать математические выражения пояснениями их геометрического или физического смысла.

При изучении уравнения Эйлера — Лагранжа необходимо понять роль интегрирования по частям и основной леммы вариационного исчисления. При рассмотрении задач механики следует проследить, как функционал действия или потенциальной энергии приводит к уравнениям движения или равновесия.

После лекции необходимо дополнить конспект, проверить обозначения и самостоятельно воспроизвести основные этапы вывода без обращения к готовому тексту.

2. Подготовка к практическим занятиям

Подготовка включает повторение соответствующей темы лекции, изучение разобранных примеров и предварительное определение метода решения предстоящих задач.

При решении вариационной задачи рекомендуется соблюдать следующую последовательность:

1. Записать функционал, интервал или область определения, граничные условия и дополнительные ограничения.
2. Определить множество допустимых функций и требования к их гладкости.
3. Установить условия для допустимых вариаций.
4. Вычислить первую вариацию функционала.
5. Выполнить интегрирование по частям, сохраняя граничные слагаемые.
6. Получить уравнение для экстремали и необходимые граничные условия.
7. Решить полученную краевую задачу.
8. Проверить выполнение исходных условий и ограничений.
9. Исследовать характер стационарной функции, если это требуется.
10. Объяснить геометрический или физический смысл результата.

В задачах с интегральными ограничениями необходимо построить расширенный функционал и определить множитель Лагранжа совместно с искомой функцией. Полученное решение обязательно проверяется подстановкой в условие ограничения.

В задачах со свободными концами нельзя заранее приравнивать соответствующие вариации нулю: именно граничные слагаемые позволяют получить естественные условия.

3. Изучение условий экстремума

Решение уравнения Эйлера — Лагранжа позволяет найти стационарную функцию. Для вывода о минимуме или максимуме требуется дополнительное исследование.

При изучении второй вариации рекомендуется:

- записывать её выражение для конкретного функционала;
- исследовать знак на множестве допустимых вариаций;
- проверять условия применимости признаков экстремума;
- различать необходимые и достаточные условия;
- учитывать возможность нулевого значения второй вариации при ненулевой вариации.

Выполнение условия Лежандра само по себе не является достаточным доказательством минимума. При использовании условия Якоби необходимо учитывать положение сопряжённых точек. Для квадратичных функционалов полезно применять свойства положительно определённых форм и соответствующие интегральные неравенства.

4. Выполнение самостоятельной работы

Самостоятельная работа должна выполняться регулярно в течение семестра. Её содержание включает повторение теории, восстановление выводов, решение дополнительных задач и подготовку расчётных материалов.

Рекомендуемый порядок работы:

1. Прочитать соответствующий раздел конспекта и рекомендованного преподавателем источника.

2. Составить краткую запись основных определений, формул и условий их применения.
3. Самостоятельно воспроизвести один ключевой вывод.
4. Решить задачу без использования готового решения.
5. Проверить результат и проанализировать ошибки.
6. Сформулировать вопросы для обсуждения на занятии или консультации.
Особое внимание следует уделять темам, связывающим математический аппарат с прикладной механикой: принципу Гамильтона, потенциальной энергии упругой системы, вариационным постановкам задач о стержне и балке, методу Ритца.
Использованные источники необходимо указывать. Заимствованные решения следует разбирать и воспроизводить самостоятельно, объясняя каждое существенное преобразование.
5. Выполнение индивидуального расчётного задания
До начала расчёта необходимо уточнить исходные данные, систему единиц, положительные направления перемещений и нагрузок.
Рекомендуется оформлять работу в следующем порядке:
1. Условие задачи и расчётная схема.
2. Принятые допущения.
3. Функционал и множество допустимых функций.
4. Вычисление первой вариации.
5. Уравнения и граничные условия.
6. Аналитическое решение.
7. Проверка результата.
8. Вывод о характере экстремума и физическая интерпретация.
В задачах о стержне следует контролировать связь между перемещением, деформацией и продольной силой. В задачах об изгибе балки — различать условия на прогиб и угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу.
Проверка должна включать соответствие размерностей, выполнение граничных условий и оценку поведения решения при изменении нагрузок и жёсткости.
6. Выполнение компьютерного задания
Компьютерный расчёт выполняется после построения математической модели и определения метода решения.
При реализации метода Ритца необходимо:
- выбрать пробные функции, удовлетворяющие существенным граничным условиям;
- при неоднородных условиях выделить функцию, обеспечивающую заданные граничные значения;
- подставить приближение в функционал;
- получить систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов;
- решить систему и восстановить приближённую функцию;
- сопоставить результат с точным решением или другим обоснованным ориентиром;
- исследовать влияние числа базисных функций на точность.
Следует проверять линейную независимость базисных функций и корректность вычисления интегралов. Естественные граничные условия в методе Ритца учитываются через вариационную постановку и не обязаны выполняться каждым приближением точно.
Отчёт должен содержать постановку задачи, выбранный базис, основные уравнения, результаты расчёта, графики и оценку погрешности. Скрипт должен позволять воспроизвести представленные результаты.
Совпадение решения в одной точке не подтверждает его точность на всём интервале. Необходимо оценивать погрешность по области расчёта и, при необходимости, сравнивать производные, внутренние усилия и значения функционала.
7. Использование справочных материалов и цифровых инструментов
Для подготовки рекомендуется использовать конспект лекций, учебники и пособия, указанные преподавателем, а также проверенные университетские учебные материалы.
При работе с источниками следует сопоставлять обозначения и соглашения о знаках. Различающиеся по форме выражения могут быть эквивалентными, однако это необходимо подтвердить преобразованиями.
Системы компьютерной математики и инструменты искусственного интеллекта допускается применять для самопроверки и разбора затруднений с учётом правил преподавателя. Полученные формулы, вычисления и объяснения необходимо проверять самостоятельно. Обучающийся должен уметь объяснить представленное решение и воспроизвести его основные этапы.
8. Подготовка к текущему контролю
При подготовке к опросу и тестированию следует повторить определения, условия применимости методов и типичные различия:
- функция и функционал;
- стационарность и экстремум;
- существенные и естественные граничные условия;
- интегральные и поточечные ограничения;
- необходимые и достаточные условия минимума.
Перед контрольной работой рекомендуется самостоятельно решить задачи соответствующего раздела и проверить способность выполнять расчёт без готового образца.
На контрольной работе необходимо показывать ход решения. Итоговая формула без постановки, вывода и проверки не позволяет полностью оценить освоение метода.
9. Подготовка к промежуточной аттестации
Подготовку следует вести по перечню контрольных вопросов и типовых задач. Форма аттестации определяется учебным планом.
Для каждого теоретического вопроса рекомендуется подготовить:
1. Основное определение или формулировку.

2. Условия применимости.
3. Ключевые этапы вывода.
4. Пример использования.
5. Ограничения метода.
При подготовке расчётной части необходимо отработать задачи с закреплёнными и свободными концами, интегральными ограничениями, исследованием второй вариации, энергетическими постановками и приближением по методу Ритца.
На аттестации следует последовательно объяснять постановку задачи, выбранный метод, получение граничных условий и проверку результата.